تجسم هندسی‌درسطوح تفکر هندسی‌ون‌هیلی‌وبازی‌اریگامی

شقایق شریف پور[۱]، الهه امینی‌فر[۲]، حمید مسگرانی[۳]

دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

shaghayeghsharifpoor@yahoo.com

چکیـده

یکی از اهداف مهم این مقاله این است که چگونه از مشاهده و تجسم جهت روشن‌اکردن واقعیات و مفاهیم‌ریاضی بهره‌جوییم. در این مقاله، به روش‌هایی برای پرورش درک تجسم هندسی، با تمرکز بر تجسم ریاضی اشیای‌هندسی دو بعدی و سه بعدی با استفاده از بازی اریگامی از طریق فیلم آموزشی و بازی باکاغذ، اشاره شده است. این نمایش‌ها می‌توانند بوسیله‌ی نرم‌افزارهای کامپیوتری یا به وسیله‌ی دست تولید شوند. به علاوه تلاش شده است با انجام فعالیت و بازی اریگامی با استفاده از کاغذ بین هندسه و هنر پلی زده شود. در این نوشتار مثالی عملی برای پرورش ادراک تجسم هندسی، که هم به عنوان ابزاری برای ادراک فرآیندهای ریاضی و هم برای توسعه‌ی بیان هنری فرد می‌باشند آورده شده است و این مثال به سی نفر از دانش‌آموزان داده شده که برخی از پاسخ های آنان نیز ذکر و تحلیل شده است.

واژه‌های کلیدی: تجسم هندسی، ون هیلی، اریگامی

۱- مقدمه

افلاطون بر سر در آکادمی خود چنین نوشته بود: کسی که هندسه نمی‌داند از این در داخل نشود.

افلاطون در مکتب خود هندسه تدریس نمی‌کرد که فلسفه می‌آموخت. او به هندسه برای پرورش فکر و استدلال اهمیت بسیار می‌داد و اطلاع از هندسه را برای مطالعه‌ی فلسفه لازم می‌دانست. بسیاری از دانشمندان و فلاسفه مطالعه‌ی هندسه را برای پرورش فکر و استدلال بسیار سودمند و لازم می‌دانستند. نکته‌ی مهم آن است که هندسه با وجودی که مجرد و انتزاعی است محسوس می‌نماید و این مزیت بزرگ هندسه است. نقطه ای که روی کاغذ می‌گذاریم و خطی که روی کاغذ رسم می‌کنیم با وجود آن که با اصطلاحهای تعریف نشده‌ی نقطه و خط هندسی یکسان نیستند اما نماد مناسبی برای اصطلاح‌های تعریف نشده‌اند و این امر به محسوس نمودن هندسه بسیار کمک کرده است.

مطرح کردن مطالب کاملا مجرد و انتزاعی برای مبتدیان مناسب نیست. ارائه‌ی این‌گونه مفاهیم نه تنها شور و اشتیاق در آن‌ها بوجود نمی‌آورد که میزان استقبال آنها را نیز از مطالب می‌کاهد. هندسه به علت مجرد و در عین حال محسوس بودن و به کارگیری استدلال‌های مسلسل بسیار جذاب،وسیله ای بسیار مناسب برای پرورش فکر است. از این رو باید که به درس هندسه توجه خاص مبذول داشت.

موضوع محسوس و ملموس کردن مسائل علمی همواره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده است. ارائه‌ی استدلال‌های ساده وجذاب و مثالهای مناسب خدمت بزرگی است به جویندگان این دانش. آموزشی بدین شیوه علم آموزان را مجذوب می‌کند و آنان را به اندیشه وتفکر وا می‌دارد و در نتیجه ایشان را به لذت حاصل از کشفیات علمی می‌رساند و به سوی مطالعه‌ی همیشگی و پژوهش و خودآموزی رهنمون می‌گردد و پیداست تا چه حد سودمند است(شرف الدین،۱۳۷۷).

---

۱ و *- دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

۲و *- استادیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، علوم پایه (elaheaminifar@srttu.edu).

[3]- استادیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، علوم پایه *

هم ریاضیات و هم هنر، زبان، ساختار و شیوه‌ی بیان خود را دارند؛ ریاضیات مانند هنر، برای پیشرفت خلاقیت و ادراک شهودی، به مهارت‌های حل مسأله‌ی خلاق و به‌کارگیری مهارتهای رسمی و غیر رسمی نیاز دارد. پرورش مهارت جهت گزینش ابزارها، رسانه‌ها و رویکردهای مناسب، برای کارآموزان هنر و ریاضی در زمینه‌های خودشان مشترک هستند.

برای یادگیری ایده‌های پیچیده‌ی جدید باید یادگیرنده بتواند اطلاعات گوناگون قبلی را با هم تلفیق کند تا به درک عمیق‌تری از مفهوم دست یابد، در ضمن باید بین انواع مختلف اطلاعات ارتباط برقرار کند تا مفهوم حاصل سودمند باشد و برای این منظور باید تفکر دانش‌آموزان انعطاف پذیر باشد و تجسم جایگاه ویژه ای در کسب بازنمایی‌های[1] دقیق دارد.

۲- مشاهده و تجسم

مشاهده و تجسم از همان آغاز نقشی اساسی در پیشرفت ریاضیات داشته‌اند. در یونان قدیم هندسه دانان اشکال هندسی خود را بر روی شن‌ها رسم می‌نمودند و در مسیر همین کوشش‌ها برای حل مسائل هندسی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرل پا گرفت و رشد خود را آغاز نمود. بنابراین نادیده گرفتن نقش مشاهده و تجسم به کمک تصاویر به معنی نادیده گرفتن بسیاری از ایده‌ها و مطالب ریشه دار در ریاضیات می‌باشد.

در مشاهده و تجسم واقعی از مسائل، نکات دیدنی به صورت دیدنی مجسم و رویت می‌گردند. روش مشاهده و تجسم ایده‌ی جدیدی نیست، جداول و منحنی نمایش‌ها قدمتی همانند خود ریاضیات دارند، بخصوص هندسه که وابستگی انکار ناپذیری با شکل و تصویر دارد.

مشاهده و تجسم یک مسأله چیزی بالاتر از مشاهده‌ی ظاهری با چشم است و همان‌طور که گفته شد بیشتر به معنی درک و فهم مسأله است، البته آن نوع درک و فهمی که با نگرش در تصاویر و اشکال درون مغز و چشم بوجود می‌آید. در این‌جا به این موضوع اشاره می‌کنیم که در ریاضی ودر بیشتر محاسبات علمی شخص ممکن است چیزی را که دیده نمی‌شود و هرگز دیده نخواهد شد، تصور و تجسم کند.

مشاهده و تجسم در ریاضی در حقیقت کاربرد ریاضی در رسم اشکال و منحنی‌ها نیست. همچنین یک تفکر مبهم و نامعلوم نیست، بلکه یک جایگزین برای فهم سطحی بوده و تفکریست که در قلب یک ایده و مفهوم ریاضی نفوذ می‌کند.

مشاهده و تجسم را نباید از بقیه‌ی ریاضیات جدا کنیم. مشاهده و تجسم باید به سایر مولفه‌های تفکر ریاضی الحاق گردد. شخص باید بیاموزد که چگونه ایده‌های ریاضی را توسط نماد، اعداد و منحنی‌ها نمایش دهدو به آن توانایی برسد که بتواند طرح مناسبی را برای رسیدن به جواب نهایی مسأله‌ی خاص ارائه بدهد.

تفکر بر اساس تجسم و مشاهده در مقایسه با تفکر تحلیلی و محاسباتی به آگاهی و بینش و هم‌چنین فعالیت بیشتر مغزی نیازمند می‌باشد. بنابراین طبیعی خواهد بود که دومی طرفدار کمتری داشته باشد! نژاد صادقی (۱۳۷۶)

۳- تجسم

تجسم به عنوان روشی از استدلال، در پژوهش‌های ریاضی و در یادگیری ریاضیات بررسی شده است.تجسم در فرهنگ لغت آکسفورد ادونس(۲۰۰۸)به صورت زیر تعریف شده است:

تشکیل تصویری از یک شئ و یا یک شخص در ذهن شما. مجموعه تعاریف در مورد تجسم نسبتاکلی است و تشخیص واژگان فنی هم در این حوزه به دقت نیاز دارد. اصطلاحات استدلال تجسمی[2]، تصور[3]، تفکر فضایی[4]، تصویر سازی ذهنی[5]، تصاویر ذهنی[6]، تصاویر بصری[7]، تجسم، توانایی فضایی[8]و تصور ذهنی[9] و موارد دیگر، بیشتر در حوزه‌ی روانشناسی دیده می‌شوند می‌شوند و تعداد کمی از آنها در آموزش ریاضی وجود دارد(گوتریز،۱۹۹۷)

---

[1] representations
[2] Visual reasoning
[3] imagination
[4] Spatial thinking
[5] imagery
[6] Mental images
[7] Visual images
[8] Spatial ability
[9] Mental image

آرکاوی [1] پیشنهاد می‌کند که تجسم[2] عبارتست از توانایی،فرآیند و محصول خلاقیت، تفسیر، استفاده از تصویرها، شکل‌ها، نمودارها، و بازتاب بر آنها، در ذهن ما، بر روی کاغذ یا توسط ابزارهای فناورانه، با هدف مجسم کردن و مرتبط کردن اطلاعات، اندیشیدن درباره‌ی ایده‌های ناشناخته‌ی پیشین و توسعه‌ی آنها و ارتقای ادراک(آرکاوی ۱۹۹۹، نقل شده در ماراآلاجیک،دیاناپلنز 2005).

هدف عمده از آموزش ریاضیات به دانش‌آموزان توسعه‌ی درک ریاضی و رشد توانایی حل مسأله‌ی آن‌ها می‌باشد. بسیاری از مردم دریافته‌اند که بخشی از اندیشیدن به شیوه‌ی تجسمی[3]صورت می‌گیرد.تجسم متضمن همان بازنمایی‌ها[4] و فرآیندهای ادراک است(فینک[5] به نقل از اسمیت[6] ۲۰۰۳)

اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای (NCTM,2000) بر این باوراست که تجسم نقشی مهم در حل مسأله‌های ریاضیات دارد. بنابراین« دانش‌آموزان باید برای بکارگیری انواع بازنمایی‌های تجسمی و هماهنگ ساختن آنها برای تحلیل مسأله‌ها موضوعات ریاضی، کسب تجربه کنند.» (NCTM,2000 ص۴۲).

تجسم یکی از مولفه‌های اساسی هوش انسانی می‌باشد. دانشمندان و هنرمندان خلاقانه‌ترین آثار خود را از راه تفکر تجسمی آفریده‌اند(شپاردو کوپر، ۱۹۸۲)معلمان باید نه تنها مهارتهای توصیفی[7] داانش‌آموزان را تقویت کنند، بلکه به مهارت‌های تجسمی آنان نیز توجه داشته باشند تا در حل مسأله‌ها مددکار آن‌ها باشند. بیشتر آموزشگران ریاضی، توانایی بازنمایی تصویرهای ذهنی وموضوعات مرتبط به تجسم را به هندسه ربط می‌دهند(وک بیکر[8]، ۲۰۰۷).

پستالوزی(۱۹۹۰ به نقل از گوتریز[9] ۱۹۹۷) دانش مشاهده‌ی مفهومی واحساسی(تجسم)، را مهمترین اصول پایه‌ای و اساس اساس همه‌ی شناخت‌ها معرفی می‌کند. فهمیدن نوع خاصی از دیدن(تجسم) است. افلاطون، درک کردن شکل‌ها یا ایده‌ها را به عنوان نوعی بینایی توصیف کرده است. برای فهمیدن قلب‌های بصری"تجسمی" نیاز به تشخیص بین فهمیدن تجسمی وغیر تجسمی خواهد بود. فرآیندهای ذهنی که به فهمیدن دیداری مرتبط است، تفکر تجسمی نام دارد(لش[10] و لش[11]،۲۰۰۸)

۴- تجسم و ادراک

کاسلین[12](۱۹۹۳ به نقل از اسمیت و همکاران۲۰۰۳) معتقد است که در موارد زیر، تجسم (تصویر سازی) و ادراک کاملا شبیه به هم می‌باشند:

الف: چرخش ذهنی(دوران): مثلا شکلی را به اندازه‌ی دلخواه از هر سمت و با هر درجه ای(مثلا ۹۰ درجه) بچرخانیم.

ب: عملیات جستجو (اسکن کردن[13]) بر روی یک شئ (واقعی یا تخیلی) یا ردیف : این مورد نشان می‌دهد که افرد تصاویر ذهنی خود را همانند واقعیت بیرونی تجسس می‌نمایند. این مورد حتی می‌تواند در مورد تجسم یک صحنه‌ی خیالی و غیر واقعی و یافتن چیزی در آن صورت گیرد مثلا پیدا کردن گنج در یک جزیره‌ی خیالی.

ج: محدودیت هر دو (تصور و ادراک) در زوم کردن[14]: برای مثال، صفحه‌ی تلویزیون دارای سلول‌های نوری است که تعداد آن‌ها (در واحد سطح) تعیین کننده‌ی ظرافت تصویرند و با کوچک شدن تصویر هنوز تصویر را قابل دیدن می‌نمایند. هر چند که مغز چنین صفحه‌ای ندارد، اما می‌توانیم به تصاویر (ذهنی) خود همانند شرایط ذهنی بیندیشیم؛ ظرافت این تصاویر محدود به جزییاتی است که ما در یک تصویر (واقعی)، تشخیص می‌دهیم. پس چنان‌چه این اندازه ثابت باشد، کنکاش در اشیای

---

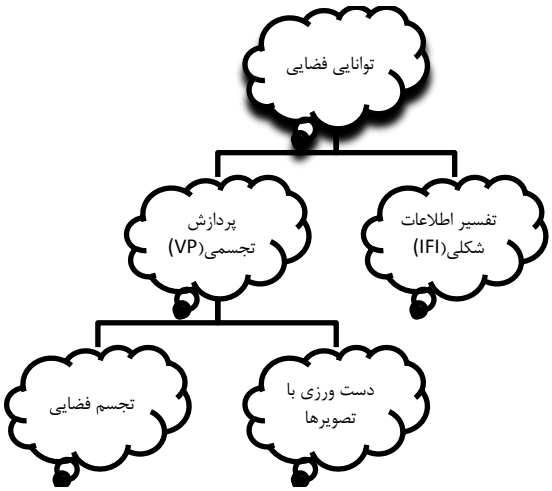
1 Arcavi
2 visualization
3 visual
4 Representation
5 Fink
6 Smith
7 Illustrative
8 Weckbacher
9 Gutierrez
10 Les, zbigniew
11 Les,Magd a lena
12 Kosslyn
13 Scaning
14 Gruinsize

کوچکتر دشوارتر از اشیای بزرگ‌ترخواهد بود. در تصور هم مثل ادراک، هر چه تصور بزرگ‌تر باشد جزییاتش راحت‌تر دیده می‌شود (اسمیت و همکاران۲۰۰۳).

۵- تجسم و توانایی فضایی

اراسو[1] (۲۰۰۷) با الهام از تقسیم بندی بیشاب (۱۹۸۳)در مورد توانایی فضایی و تجسم دانش‌آموزان، ارتباط بین اصطلاحات موجود در ادبیات تجسم وتوانایی فضایی را در شکل زیر نمایش می‌دهد.

شکل۱: ارتباط سلسله مراتبی اصطلاحات، از دیدگاه اراسو(۲۰۰۷)



همان‌طورکه در شکل ۱ نشان داده شده است برخی از آموزشگران توانایی پردازش تجسمی را نوعی توانایی فضایی می‌دانند. اراسو می‌گوید: اصطلاحات به کار رفته در این شکل، قسمتی از فرایند حل تکالیف ریاضی را توصیف می‌کنند. البته لازم به ذکر است که دسته‌بندی توانایی فضایی به دو زیر مجموعه‌ی، پردازش تجسمی[2](VP) و تفسیر اطلاعات شکلی[3](IFI)، شکلی[3](IFI)، توسط بیشاب[4](۱۹۸۳) معرفی شده است.

۶- اعتقاد برطبیعت ریاضی

برای ارتباط پیدا کردن با یکدیگر در خصوص مفاهیم ریاضی معمولا از راه‌های غیر تجسمی و با استفاده از نمادها و علائم ریاضی عمل می‌کنیم. این عادت بر این پایه استوار است که خیلی از ریاضیدانان و معلمان و دانش‌آموزان عقیده دارند که ریاضیات غیر تجسمی است و شهودی نیست. جالب توجه است که بسیاری هستند که اثبات به طریق شهودی (اثبات بدون کلام) را، یک اثبات نمی‌دانند و عقیده دارند که اثبات‌ها حتما باید محاسباتی و بر اساس نمادها باشند، در غیر این صورت اثبات به حساب نمی‌آیند. به عنوان مثال "باید توجه کنیم که رسم شکل در هندسه یک وسیله‌ی کمکی در اثبات است نه خود اثبات."(مگردیچ تومانیان،۱۳۶۳) این طرز فکر سوال برانگیز است. بررسی نشان می‌دهد که بیشتر افراد بر این اعتقادند که هر چند شکل و تصویر می‌تواند جهت بوجود آمدن یک اثبات بکار گرفته شود، ولی تنها وتنها به یک طریق می‌توان ارتباط ریاضی برقرار نمود و اثبات‌های بدون کلام به عنوان یک اثبات ریاضی قابل پذیرش نیستند. نژاد صادقی (۱۳۷۶)

۷-کاغذ و تا و اریگامی یکی از شیوه‌های آموزش ضمن کارگاهی

بدون اغراق یکی از ارکان تمدن و یکی از شیوه‌های آموزش ضمن کارگاهی،کاغذ و تا است. به هر طرف که نظر افکنیم و به هر گوشه‌ای که برویم با کاغذ سر و کار داریم. گزاف نگفته‌ایم اگر بگوییم که بشر امروزی در میان کاغذ غوطه می‌خورد و در تمام امور فرهنگ و تمدن خود از کاغذ به عنوان وسیله‌ی کار استفاده می‌نماید.

1 Eraso Mario
2 Visual processing
3 Interpreting Figural Information
4 Bishop,Alan

ساختن کاغذ از الیاف گیاهان از زمان‌های بسیار قدیم در چین متداول بود و آن‌ها از حدود قرن اول و دوم قبل از میلاد با هنر ساختن کاغذ آشنایی داشتند و از آن استفاده می‌کردند. این هنر در قرن ششم به ژاپن منتقل شد. در این جزیره‌ی کوچک کاغذ ماده‌ای ارزشمند به شمار می‌رفت. آن‌ها از کاغذ برای تزیینات، ساختن بادبادک‌ها و فانوس‌ها در مراسم مختلف و برای پوشاندن پنجره‌ها استفاده می‌کردند. بازی با کاغذ و سرگرم شدن با آن در بین اشراف و ثروتمندان ژاپن رواج فروان داشت(صالحی طالقانی و امینی،۱۳۷۹).

اری به معنای تا کردن و گامی به معنای کاغذ است. ترکیب آن‌ها با یکدیگر کلمه‌ی اریگامی را می‌سازد. بنابراین اریگامی هنر اندیشه‌ی تا کردن کاغذ برای خلق شکل‌های مختلف می‌باشد(گروه آموزشی پژوهشی اندیشه‌ی خلاق،بی‌تا).

اریگامی سنتی عبارتست از هنر تا زدن ورقه‌ای کاغذ، بدون بریدن، چسباندن؛ یا تزیین کردن و ساختن حیوانات، پرندگان ماهی‌ها و چیزهای دیگر. در اریگامی نو اندکی از این سخت‌گیری‌ها کاسته شده و استفاده از قیچی، چسب، مداد و سایر چیزهای ساده مجاز شمرده شده است. ولی هم‌چنان که شیرینی و لطافت شعر در به کار بردن کمترین واژه‌ها، تحت قواعد سخت و شدید می‌باشد، فریبندگی و کشش اریگامی نیز در این واقعیت نهفته است که جز از یک ورق کاغذ و یک‌جفت دست‌ماهر، از چیز دیگری استفاده نشود.

با رشد ارتباطات بازرگانی و همراه با توسعه‌ی صنعت کاغذ سازی، اریگامی پا به پای رواج کاغذ، گسترش یافت و در تمامی ممالک غنی و فقیر نفوذ کرد. این گسترش در کشورهای آسیای هنر اریگانی به وسیله‌ی قبایل مور که مسلمانان غرب آفریقا بودند در قرن هشتم میلادی به اسپانیا منتقل شد. مسلمانان در آن زمان، با توجه به ریاضیات ونجوم اسلامی به ساخت اشکال گوناگون می‌پرداختند.

میگل اویونامونو[1] با تنظیم مقاله‌ی طنز آمیز و سرودن شعر، هنر اریگامی را به میان مردم برد، همچنین با ریختن شالوده‌ای اصولی در تازدن کاغذ، بسیاری از گونه‌های تازه و چشم گیر را ابداع کرد.

از نظر هندسی، اریگامی دارای جاذبه‌ای دل‌انگیز است و شگفت نیست که بسیاری از ریاضیدانان به طرف این هنر کشیده شده‌اند. لویزکارول[2] معلم ریاضیات آکسفورد، یکی از همین اشخاص بود. یادداشت‌های او نشان می‌دهد که چقدر به این کار علاقه نشان می‌داد و چه شور و نشاطی به او دست داده وقتی که توانسته برای اولین بار وسیله‌ای از کاغذ بسازد که با حرکت دادن آن در هوا، صدای بلندی تولید می‌شود.

هرچند اریگامی یک هنر است ولی اساس آن ریاضی و هندسی است. در حقیقت در اریگامی با ترکیب چند شکل هندسی یک حجم زیبا پدید می‌آید. اگر ریاضی را از اریگامی بگیریم، جز کاغذ که ماده‌ی خام آن است چیزی باقی نخواهد ماند(صالحی طالقانی و امینی،۱۳۷۹).

از زمان‌های قدیم چینی‌ها و بسیاری از اقوام دیگر برای سرگرم کردن فرزندان خود از کاغذ و تا برای ساخت اشکال یا وسایل گوناگون (شبیه موشک،قایق و بادبادک) استفاده می‌کردند. اما امروز، این روش به صورت یک علم درآمده و در رشته‌های هنری و آموزش به صورت علمی به کار گرفته می‌شود.

اریگامی فقط از تعداد کمی از تاهای گوناگون استفاده می‌کند، ولی همین تاها می‌توانند به روش‌های گوناگونی ترکیب شوند تا طرح‌های متفاوتی ایجاد کنند. به طور کلی، این طرح‌ها با یک برگ کاغذ مربع شکل آغاز می‌شود که هر روی آن ممکن است به رنگ متفاوتی باشد و بدون بریدن کاغذ ادامه می‌یابد (تیموری، ۱۳۸۸).

اریگامی یک معماری با استفاده از ابزاری خاص است که می‌توان نام بخشی از آن را که به کار کلاسی هندسه می‌آید، هندسه‌ی کاغذ و تا گذاشت. در واقع هندسه‌ی کاغذ و تا تنها بخش بسیار کوچکی از دنیای ریاضی اریگامی است. هندسه‌ی کاغذ و تا، یکی از ساده‌ترین شیوه‌ها برای جذاب‌ترکردن آموزش است و برای خود اصول و قواعدی دارد که عبارتند از :

۱- با تاکردن کاغذ، ردی به صورت خط راست روی آن خواهد افتاد.
۲- با تاکردن، می‌توان خطی را از یک یا دو نقطه گذراند.
۳- با تاکردن، می‌توان نقطه‌ای را روی نقطه‌ی دیگر از همان کاغذ انداخت.
۴- با تاکردن، می‌توان نقطه‌ای را روی خطی از همان کاغذ انداخت تا رد کاغذ از نقطه‌ی دوم بگذرد.
۵- با تاکردن، می‌توان هر خطی را روی خط دیگری از همان کاغذ انداخت.

1 -Miguel deunamuno

2 -Lewis carroll

۶- با تاکردن، می‌توان پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها را روی یکدیگر انداخت. اگر آن‌ها همدیگر را به طور کامل بپوشانند می‌توان گفت با هم برابرند.

کاغذ و تا نه تنها زبان ساده‌ای برای یادگیری هندسه است، بلکه روش برتری برای فهم و درک مفاهیم آن می‌باشد.

برای هندسه‌ی کاغذ و تا، هر کاغذی قابل استفاده است. اما بهتر است از کاغذ روغنی ضخیم استفاده کنیم. وقتی کاغذ روغنی را تا می‌زنیم، رد آن به صورت خط سفیدی باقی می‌ماند. به خاطر شفافیت نسبی کاغذ روغنی رد یا نوشته‌ی روی آن، از هر دو طرف قابل مشاهده است. به این ترتیب جابجایی، انطباق، وارونه کردن، چرخاندن و دوران، قرینه کردن و... به سهولت انجام پذیر است.

در ریاضیات تفریحی یا به تعبیری سرگرمی و ریاضی، تا کردن کاغذ و یا کاغذ و تا جایگاهی خاص دارد و مقاله‌ها و کتاب‌های بسیاری می‌توان یافت که درباره‌ی آن نوشته شده است. اما در بحث‌های آموزش و یادگیری کلاسیک مطالب بسیار محدودی در زمینه‌ی هندسه‌ی کاغذ و تا وجود دارد (صالحی طالقانی و امینی، ۱۳۷۹).

مدارس برخی از کشورهای جهان اریگامی را جزء درس‌های دانش‌آموزان قرار دادند (عزیزی، بی تا).

نوع استفاده از این روش در هنر و آموزش ریاضی متفاوت است. در هنر از کاغذ و تا برای ساخت کاردستی یا نمایش حیوانات استفاده می‌شود. در حالی در آموزش ریاضی هم می‌توان از کاغذ و تا برای نمایش درستی قضایا و مسائل هندسی استفاده کرد. هم از قوانین و مسائل ریاضی برای تعیین نوع تاهای مناسبی که بتواند یک کاغذ را برای نمایش این قضیه مستعد کند، استفاده نمود(تیموری، ۱۳۸۸).

۸- فوائد اوریگامی

هماهنگی بین چشم، ذهن و دست، مهارت در کارهای فکری که نیاز به انجام ترتیب وتوالی خاص دارد، پرورش خلاقیت، مهارت در دقت و سرعت، افزایش صبر و شکیبایی، افزایش مهارت‌های خاص جسمانی، افزایش نتیجه گیری منطقی و ریاضی ارزانی و فراوانی کاغذ، صرفه‌جویی در زمان و بالابردن میزان دقت، افزایش عمق یادگیری با استفاده از ایجاد محدودیت، سهولت یادگیری و به خاطرسپاری مطالب آموخته شده، کمک به درک سریع‌تر و عمیق‌تر ارتباط بین اجزای اشکال، امکان عمل متحرک سازی و تقویت قدرت تخیل دانش‌آموزان، سادگی فعالیت‌های کاغذ وتا نسبت به انجام فعالیت‌ها با مواد دیگر، استفاده‌ی بهینه از استدلال شهودی به منظور سهولت فهم استدلال استنتاجی (گروه آموزشی پژوهشی اندیشه ی خلاق، بی تا؛ عزیزی،بی تا؛ تیموری، ۱۳۸۸).

۹-سطوح ون هیلی درباره تفکر هندسی

در اصل ون هیلی پنج سطح داشت که توسط پژوهشگران مختلف به کار برده شده و دوباره نامگذاری شده‌اند؛ اما اکنون سطوح ون هیلی روی سه سطح تمرکز دارند، که آموزش مدرسه ای بیشتر آنها را می‌پوشاند. تجسم با "تفکر غیر کلامی" آغاز می‌شود. شکل‌ها توسط ظاهرشان سنجیده می‌شوند و عموما به جای اجزای جدا از هم به عنوان یک کل دیده می‌شوند در سطح تجزیه و تحلیل[1]، دانش‌آموزان می‌توانند اجزا را تشخیص دهند و ویژگی‌های شکل‌ها را شرح دهند. برای مثال، یک مثلث متساوی الاضلاع می‌تواند به دلیل داشتن سه ضلع مساوی، زوایای مساوی و تقارن‌هایش، از سایر مثلث‌ها تمیز داده شود. دانش‌آموزان نیاز دارند که زبان مناسبی را برای گام برداشتن به سوی مفاهیم تازه بیاموزند. به هر حال در این مرحله، ویژگی‌ها "به طور منطقی مرتب نمی‌شوند"، به این معنا که دانش‌آموزان ارتباط‌های اساسی بین ویژگی‌ها را درک نمی‌کنند. در سطح استنتاج [2] غیر رسمی، ویژگی‌های شکل به طور منطقی مرتب می‌شوند. دانش‌آموزان می‌توانند ببینند یک ویژگی بر دیگری تقدم دارد یا بعد از دیگری می‌آید، بنابراین می‌توانند یک ویژگی را از دیگری نتیجه بگیرند. آنها می‌توانند آنچه را که تا کنون می‌دانستند، برای شرح ارتباط‌های بین شکل‌ها و صورت بندی تعریف‌ها به کار برند. به طور مثال آنها می‌توانند توضیح دهند که چرا همه‌ی مربع‌ها مستطیل هستند. اگر چه استنتاج غیر رسمی مبنای استنتاج رسمی است، اما نقش اصول موضوع، تعریف‌ها، قضیه‌ها و عکس قضیه‌ها درک نمی‌شود. دانش‌آموزان می‌توانند ارتباط‌های درونی بین شکل‌ها را مشاهده کنند و ارتباط‌ها را از طریق شکل‌ها نتیجه بگیرند. اثبات‌های ساده می‌تواند جریان یابد اما به طور کامل درک نمی‌شود. دانش‌آموزان در

[1] Analyze
[2] Deductive

سطح استنتاج، معنای استنتاج و نقش فرضیه‌ها، قضیه‌ها و برهانها را می‌فهمند. آنها می‌توانند برهان‌ها را با فهم و درک بنویسند. دانش‌آموزان می‌فهمند چگونه در یک نظام اصل موضوعی کار کنند و استنتاج‌های انتزاعی بسازند. دانش‌آموزان می‌توانند هندسه‌ی نا اقلیدسی را در بالاترین سطح یعنی سطح دقت [1] بفهمند. (جرنو [2] وهال [3]،۱۹۷۷؛دریفاس [4]،۲۰۰۲)

این مراحل یادگیری، در ایجاد چارچوبی برای آموزشی که هدف آن توسعه‌ی فهم و درک مطالب یا مهارتهایی است که باید آموخته شود مهم هستند.

ایده‌ی اصلی این است که یک یادگیرنده نمی‌تواند بدون گذراندن سطوح قبلی، به سطح استدلال برسد. گذراندن سطوح قبلی یعنی دست یابی به درک عمیق تر مفاهیم و ارتباط‌هایی که به آن سطح استدلال مرتبط می‌شوند.

وقتی شخصی با نظم جدیدی از تفکر، برای یادگیری عملیات معینی روی موضوع‌های جدید توانمند می‌شود، می‌توانید بگویید به سطح بالاتری از تفکر رسیده است. دست یابی به سطح جدید نمی‌تواند متاثر از تدریس باشد، اما هنوز معلم می‌تواند با انتخاب خوبی از تمرین‌ها، موقعیت‌های مطلوبی برای دانش آموز بیافریند تا او به سطح بالاتری از تفکر دست یابد.

۱۰-دوره‌های یادگیری در سطوح تفکرهندسی ون هیلی

ون هیلی دوره‌هایی را نیز معرفی کرده است که رشد لازم برای یک دانش آموز در رسیدن به این سطوح را تشریح می‌نمایند.

۱۰-۱دوره‌ی اول یادگیری

این دوره به بحث میان دو سطح اول مربوط است. هدف از این دوره توجه دید کل نگرانه‌ی دانش‌آموزان به اشیاء با جزییات ویژه است. در این مرحله، خود اشکال علامت‌های نمادی هستند. هدف دانش‌آموزان یادگیری خصوصیات این نمادها و در نتیجه تمرکز کمتری بر خود شکل است. برای آزمایش این مسأله، با کنار گذاشتن شکل وتوجه به خصوصیات آن، شناسایی شکل از دانش آموز خواسته می‌شود. در این مرحله است که علامت‌های نمادی به علامت‌های شاخصی تبدیل می‌شود. به عنوان مثال دانش‌آموزان در این دوره یاد می‌گیرند که یک مربع دارای چهار ضلع برابر است و قطرهای آن نیز برابرند و عمود منصف یکدیگرند.

۱۰-۲دوره‌ی دوم یادگیری

دوره‌ی دوم سطح‌های دوم و سوم را در بر می‌گیرد. در این مرحله خصوصیات نماد قرار می‌گیرند و دانش‌آموزان به ارتباط با خصوصیات تشویق می‌شوند. موضوعات مورد مطالعه در طول این دوره‌ی یادگیری شبکه‌ی روابط و ترتیب خواص اشکال هندسی است. دانش‌آموزان در این دوره‌ی یادگیری به بررسی کردن راه‌هایی می‌پردازند که خواص اشکال هندسی را مرتب کنند به گونه ای که هر خاصیت یا ویژگی از شکلی از خاصیت قبلی نتیجه نشده باشد. پژوهش بر روی این دوره با بررسی شکل‌ها (مربع‌ها ومستطیل‌ها) و مشاهده‌ی ویژگی‌های عمومی آنها به انجام رسانده شد. این مطالعه به پدیده‌ی وجود نظم واینکه شکلی با شکل دیگر مشابه است اگر همه‌ی خصوصیاتشان مشترک و حتی دارای خصوصیات اضافه تری هم باشند، منجر شد (مثلا مربع نوع بخصوصی از مستطیل است.)

هنگامی که خصوصیات(علامت‌های نمادی) یک مستطیل پیش بینی یک دانش آموز از شکل دیگر(مربع) را استنباط کند در اینصورت علامت‌های نمادی، علامت‌های شاخصی گشته است.

۱۰-۳دوره‌ی سوم یادگیری

سومین دوره فاصله میان سطوح سوم وچهارم را به هم نزدیک می‌کند. جایی که دانش‌آموزان از اصول بدیهی و قضایا فکری را تولید می‌کنند. درباره‌ی ایندوره و هرآنچه که در ورای آن است تاکید زیادی شده است، چرا که اکثر دانش‌آموزان این سطح را نگذراندند.(پگ و دیوی [5]،۱۹۹۸)

نقطه‌ی متمایز دیگری در نظریه ون هیلی این است که سطوح جداگانه هستندو توانایی حرکت از سطحی به سطحی تدریجی نیست و بلکه یک «جهش» است. طبق نظر پگ و لوری [6](۱۹۹۷) بحران در تفکر دانش آموز اولویتی ضروری برای

[1] Rigor
[2] Greeno
[3] Hall
[4] Dreyfus
[5] Peg,J.&Davey,G.
[6] Lawrie,C.&Pegg,J.

رسیدن به سطح جدید است. به علاوه غیر پیوسته بودن این سطوح مشکلات ارتباطی در کلاس درس بوجود می‌آورد، زیرا معنی متفاوتی برای عملکرد دانش‌آموزان در سطوح مختلف بوجود می‌آید.

این پنج سطح لزوما با بازه‌ی سنی بخصوصی مرتبط نیستند. طبق نظریه‌ی ون هیلی، ویژگی مهمی از استدلال ریاضیاتی این است که رشد سنی لزوما دال بر رشد سطح استدلال دانش آموز نمی‌باشد.

آموزش نقش مرکزی در پیشرفت تمامی سطوح ایفا می‌کند.(جمی و گوترز[1]،۱۹۹۵ ص ۵۹۲)

۱۱-تجسم ادراکی در حمایت از سطوح ون هیلی

کابرال[2](۲۰۰۴) معتقد است که تجسم در هر یک از سطوح تفکر ون هیلی، نقش اساسی ومهم دارد. او نقش تجسم در هر سطح را بدین صورت عنوان می‌کند. در سطح دیداری، تجسم ادراکی نقشی متقاعد کننده دارد ولی نقشی اثبات کننده ندارد. در این سطح تجسم یک موضوع موجبات وسعت دامنه آن موضوع را فراهم می‌آورد.

در سطح تجزیه وتحلیل، در تفسیر شکل‌ها دقت بیشتری لحاظ می‌گردد. در این سطح تجسم ادراکی نقشی گسترده دارد. تجسم ادراکی، اطلاعاتی را در اختیار فراگیر می‌گذارد که توانایی او را در جهت تشخیص یک شکل از روی نام و ویژگی‌های آن شکل رشد می‌دهد.

در سطح استدلال غیر رسمی، تجسم ادراکی نقشی پر اهمیت بازی می‌کند. دانش‌آموزان با استفاده از آن، ارتباط بین شکل‌ها را در می‌یابند و این ارتباط‌ها، آن‌ها رابه حل مسأله رهنمون می‌سازد. همین ارتباط‌ها هستند که فرد را تا سطح بعدی می‌رسانند. در سطح استدلال رسمی، تجسم ادراکی نقشی واسطه ای بین «اطلاعات زیاد[3] و اطلاعات بیش از اندازه» را عهده دار می‌شود. بکارگیری واسطه‌ی تجسمی ادراکی، به دانش‌آموزان توانایی تحلیل درونی حل یا اثبات را هدیه می‌کند. این موضوع، امکان رمز گشایی و صورت بندی اثبات را (چه به صورت شفاهی و چه به صورت نوشتاری) برای دانش‌آموزان فراهم می‌آورد. (کابرال،۲۰۰۴)

کابرال(۲۰۰۴) متاثر از پژوهش‌های بیشاب (۱۹۸۳) به این نتیجه رسید که رعایت سطوح عنوان شده در مدل ون هیلی و استفاده از تجسم تاثیر بسزایی در حل مسائل دارد.

۱۲-انتزاعی و محسوس و ملموس بودن ریاضیات

گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، ریاضی را دارای ماهیت دوگانه می‌دانند و معتقدند که ریاضی در حالی که به شدت انتزاعی است، به شدت ملموس و محسوس است و این دو گانگی، آموزش ریاضی را با چالش‌های جدی مواجه کرده است. این محسوس و ملموس بودن شامل بسیاری چیزها از جمله نظم موجود در طبیعت و قانون مندی پدیده‌های مختلف است. علاوه بر این، از دوران طفولیت، کودکان با تلاش خود برای درک دنیای اطرافشان، ریاضی را تجربه می‌کنند، سپس در انجام بازیهای کودکانه با ریاضی زندگی می‌کنند؛ تقریب و تخمین زدن، استدلال کردن، مقایسه کردن، تناظر برقرار کردن، شمارش کردن و ده‌ها و ده‌ها فعالیت دیگر انجام می‌دهند که همگی ماهیت ریاضی دارند. وقتی این همه مهارت شکار و پنهان کسب شده‌ی ریاضی نادیده گرفته می‌شودو طوری با آنها برخورد می‌شود که انگار یک صفحه‌ی خالی و یک لوح سفید وارد مدرسه شده است. در نتیجه، کودکی که با مفاهیم مختلف ریاضی و زندگی کرده است، اغلب در مواجهه با شکل رسمی آن مفاهیم، دچار سردرگمی می‌شود و در یادگیری ریاضی خود با مشکل مواجه می‌گردد. یکی از روشهایی که می‌توان با آن، بین تجربیات و دانش غیر رسمی کودکان با دانش رسمی ریاضی آنها در آموزش ریاضی ارتباط برقرار نمود، استفاده از بازنمایی‌های چندگانه‌ی مفاهیم و ایده‌های ریاضی است.

یاددهی ویادگیری مفاهیم و ایده‌های ریاضی همواره با مشکلاتی مواجه بوده است. فرایند یاددهی و یادگیری ریاضیات در مدارس باید به گونه ای باشد تا دانش‌آموزان بدانند اغلب ایده‌های ریاضی می‌توانند به صورت ملموس، نموداری و نمادین معرفی شوند. باید تلاش کرد تا با فراهم کردن یک دیدگاه شهودی برای دانش‌آموزان و حرکت تدریجی از تجربه‌های عینی و

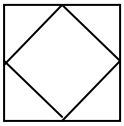
[1] Gutierrez,A.&Jaime,A
[2] Cabral
[3] Too Little information

ملموس به سمت ایده‌های مجردتر و استفاده‌ی مناسب از بازنمایی‌های چندگانه به ساخته شدن مفاهیم و ایده‌های ریاضی به آنها کمک شود (دافعی، ۱۳۸۹).

۱۳-کشف هندسی وتجسم

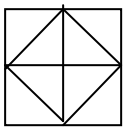
از دیدگاه شناختی، کشف کردن یک حقیقت، ناشی از باور آن، به روشی مستقل، مطمئن و منطقی می‌باشد (جیاکوینتو[1]، ۲۰۰۵). این روش، از روش معمول فرد برای انجام امور روزمره‌ی او جداست. این مسأله می‌تواند این امکان را به فرد بدهدکه بتواند چیزی را کشف نماید که قبلا توسط افراد دیگر، کشف شده است، (یعنی کشف مجدد) و این معمولا به عنوان وجه تمایز کشف و توجیه در نظر گرفته می‌شود.در مسأله‌ی زیر دانش آموز لذت کشف دوباره را خواهد چشید، به شرط اینکه از تجسم خویش استفاده نماید.

مسأله: یک مربع را تصور کنید که وسط اضلاع آن را نیز به هم وصل کرده ایم. اگر مربع اصلی را با قاعده‌ی افقی تجسم کنید، مربع داخلی کج به نظر می‌رسدیعنی روی یکی از زاویه‌هایش قائم شده است.(شکل زیر)



واضح است مربع اصلی نسبت به مربع داخلی، مساحت بیشتری دارد.ولی چقدر بزرگتر؟

با تجسم و استدلال ساده، می‌توان پاسخ را تعیین نمود. با تجسم شکل زیر، واضح است که مربع اصلی، دقیقا از مربع داخلی وچهار مثلث گوشه ای تشکیل شده استکه هر ضلع مربع داخلی ضلع مثلث گوشه ای است.اکنون فرد می‌تواند مثلث‌های گوشه ای را با تاکردن‌هایی نسبت به ضلع‌های مربع داخلی تجسم کند و به این نتیجه برسند که مثلثهای گوشه ای می‌توانند مربع داخلی را بپوشانند، بدون اینکه جایی خالی بماند. فرد استنباط می‌کند که مساحت مربع اصلی، دو برابر مربع داخلی است.



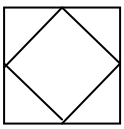
شکل۲: تجسم موجب حل مسأله‌ی هندسه می‌گردد.(جیاکوینتو، ۲۰۰۵)

۱۴-پاسخ های گوناگون دانش‌آموزان برای سوال مطرح شده در بالا

این مساله به ۳۰ دانش آموز راهنمایی داده شد که ۱۵ نفر از آنها بازی اریگامی را انجام دادند و۱۵نفر دیگر انجام نداده بودند

برخی از پاسخهای آنها در زیر آمده است، قضاوت با شما.شش روش اول برای دانش‌آموزانی است که بازی اریگامی را انجام ندادند و چهار روش دوم برای دانش‌آموزانی است که بازی اریگامی را انجام دادند.

روش ۱: اگر ضلع مربع بزرگ را a و ضلع مربع کوچک راb بنامیم، داریم:



$$a^2 + a^2 = 2a^2 \rightarrow b^2 = \sqrt{2}a \rightarrow 2a \times 2a = 4a^2 = \text{مساحت مربع بزرگ}$$

$$\sqrt{2}a \times \sqrt{2}a = 2a^2 = \text{مساحت مربع کوچک}$$

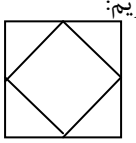
$$\frac{4a^2}{2a^2} = 2$$

پس مساحت مربع بزرگ دو برابر مساحت مربع کوچک است.

روش ۲: با خط کش ضلع مربعی که رسم کردیم را اندازه می گیریم.۴سانتیمتر است. پس مساحت مربع بزرگ برابراست با

$$4 \times 4 = 16$$

با توجه به شکل هر ضلع مثلث کوچک۲ سانتی متر است پس وتر مثلث کوچک را از رابطه فیثاغورس بدست می آوریم:



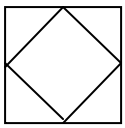
$$2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow \text{وتر} = \sqrt{8}$$

$$\text{مساحت مربع کوچک} = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$$

[1] Giaquinto

$$\frac{16}{8} = 2$$

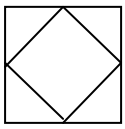
یعنی مساحت مربع بزرگ دو برابر مساحت مربع کوچک است.



روش ۳:

شکل را از روی ضلع های مربع کوچک تا می کنیم، می بینیم که کل مثلثهای کناری تمام مربع کوچک را می پوشانند. پس مساحت آن مثلثها با مساحت مربع کوچک مساویند. یعنی مساحت مربع بزرگ، دو برابر مساحت مربع کوچک است.

روش۴:



$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow \text{وتر} = \sqrt{2}$$

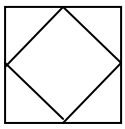
$$\text{مساحت مربع کوچک} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$\text{مساحت مربع بزرگ} = 2 \times 2 = 4$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

یعنی مساحت مربع بزرگ دو برابر مساحت مربع کوچک است.

روش ۵:



$$\text{مساحت مربع بزرگ} = 2 \times 2 = 4$$

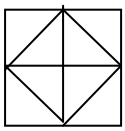
$$\text{مساحت مثلث کوچک} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{مساحت چهارمثلث کوچک} = \frac{1}{2} \times 4 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{مساحت مربع کوچک} = 4 - 2 = 2$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

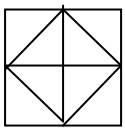
روش ۶: ضلع مربع بزرگ را a می نامیم، پس قطر مربع کوچک هم a می باشد. مساحت مربع کوچک را از راه مساحت لوزی حساب می کنیم.



$$\text{مساحت مربع بزرگ} = a \times a = a^2$$

$$\text{مساحت مربع کوچک} = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$$

$$\text{مساحت مربع کوچک} = \frac{1}{2} \times \text{مساحت مربع بزرگ}$$

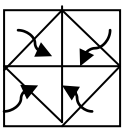


پس مساحت مربع کوچک نصف مساحت مربع بزرگ است.

روش ۷:

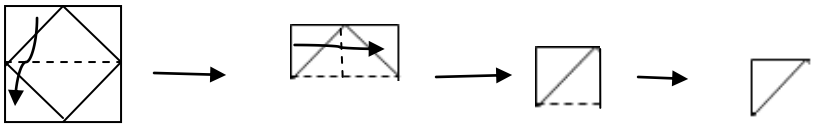
قطرهای مربع کوچک را رسم می کنیم.چون قطرها عمود منصف یکدیگرند پس چهار مثلث تشکیل شده با هم مساویند و مشخص است که چهار مثلث کناری با مثلثهای داخل مربع کوچک مساویند،پس کل شکل به هشت مثلث مساوی تقسیم شده که چهار تا از این مثلثها درون مربع کوچک است، پس مساحت مربع بزرگ دو برابر مساحت مربع کوچک است.

روش ۸:

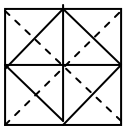


با توجه به شکل مساحت مربع بزرگ دو برابر مساحت مربع کوچک است.

روش ۹:



مثل بالا شکل را تا میکنیم وقتی بازش کنیم می بینیم که به هشت مثلث مساوی تقسیم شد، که چهار تا داخل مربع کوچکند یعنی مساحت مربع کوچک نصف مساحت مربع بزرگ است.



روش ۱۰ :

به نظر من مساحت مربع کوچک، بزرگتر از مساحت مثلثهای کناری است. حالا محاسبه میکنم ببینم حدسم درست بوده یا نه. قطرهای مربع بزرگ را رسم می کنم، مربع داخلی از چهار مربع کوچک تشکیل می شود. در صورتی که مثلثهای کناری هر کدام از دو مثلث کوچکتر تشکیل شده.حالا مربع های کوچک را هم باید به مثلثهای مساوی تقسیم کنم، پس قطرهای مربع کوچک را هم رسم می کنم. می بینیم مربع کوچکی که اول در شکل داشتم از هشت مثلث کوچک تشکیل شده و مثلثهای کناری هم از هشت مثلث کوچک تشکیل شده است.نتیجه میگیرم که هرگز نباید به چشم اطمینان کرد چون حدسم اشتباه شد یعنی مساحت مثلثهای کناری و مساحت مربع داخلی با هم مساویند. اگر مثلثهای کوچکمربع بزرگ را بشمارم میبینم که مربع بزرگ از ۱۶ مثلث کوچک تشکیل شده است یعنی مساحت مربع بزرگ دو برابر مساحت مربع کوچک است.

۱۵-تجسم در مسأله ی بالا

« برای توضیح نقش تجسم در حل این مسأله، باید نگرش واضحتری نسبت به تجسم داشته باشیم. تجسم تاخوردن مثلث‌های گوشه ای مربع اصلی به سمت مربع داخلی، به نظر یک تجربه حسی، نیست (برای مثال، پاسخ به این سوال که در اتاق شما چند پنجره وجود دارد، مستلزم یک تجربه‌ی حسی است). ولی تا کردن کاغذها خود تجربه ای حسی برای قضیه است». (جیاکوینتو، ۲۰۰۵).

البته باید توجه داشت که در تا کردن لبه‌ها، به صاف بودن آنها توجه می‌شود ولی در حل تجسمی این مسأله چنین اتفاقی نیفتاده است. پس نمی‌توان گفت فرد توانسته به قضیه‌ی فوق از راه تجسم، بدون داشتن تجربه‌ی حسی برسد و نیز نمیتوان گفت این تجربه‌ی حسی بصورتی مستقیم و هدفمند به کار برده شده است و نیز نمی‌توان گفت که این تجربه‌ی حسی یک استدلال است. بنابراین تجسم می‌تواند کارکردی غیر از تجربه‌ی حسی داشته باشد. تجربه‌ی تجسمی میتواند به عنوان ابزاری مهم برای قضاوت کردن در مورد قضیه‌ها به کار گرفته شود.(جیاکوینتو، ۲۰۰۵؛ مانکوسو و همکاران، ۲۰۰۵)

۱۶-نتیجه گیری

بنابراین در این مثال نشان داده شد که چگونه از مشاهده و تجسم جهت روشن کردن واقعیات و مفاهیم ریاضی بهره جوییم. به علاوه تلاش شده است با انجام فعالیت و بازی اریگامی با استفاده از کاغذ بین هندسه و هنر پلی زده شود یعنی دانش‌آموزان هم متوجه می شوند که مساحت مربع بیرونی دو برابر مساحت مربع داخلی است وهم بازی اریگامی را می آموزند که خود هنری زیباست و هم با ساختن مجسمه های کاغذی لذت می برند و با تمرین این موارد ادراک تجسمی آنان تقویت می گردد.

تجسم تنها دیدن چیزی که برای ذهن درونی شده، نیست. تجربه‌ی دیداری، به تصورات و نیات مشاهده کننده بستگی تدارد، در حالیکه تجسم به نیت وتصور تجسم کننده وابسته است. از مطالب گفته شده می‌توان نتیجه گرفت که منابعی که برای تجسم این مسأله، بکارگرفته شده است، به وضعیت شناختی و پیشینه‌ی تجسمی فرد بستگی دارد. لازم است توجه کنیم حل این مسأله، بدین معنی نیست که ما از طریق روشهای تصوری و تجسمی می‌توانیم همه‌ی قضایای هندسی را ثابت کنیم، بلکه می‌توان گفت فقط در برخی موارد چنین است.

جمله‌ی معروفی که می‌گوید: ارزش یک تصویر بیشتر از صد کلمه و حرف است. در حقیقت معنی این جمله این است که یک تصویر حتی نسبتا ساده، ممکن است حقایق بیشماری را شامل باشد، حقایقی که می‌توان آنها را در شکل دید و خواند. یعنی یک تصویر در حقیقت نمایش فشرده ای از یک مفهوم است.

مطالعه‌ی ریاضیات ذهن ر ا چنان پرورش می‌دهد که از هزار چشم با ارزشتر است. افلاطون

مراجع

[۱]اسمیت.ا.ادوارد و همکاران.(۲۰۰۳)زمینه‌ی روانشناسی هیگارد و اتکینسون. ترجمه‌ی :دکتر محمود بهزاد و دیگران. ۱۳۸۸. انتشارات گپ. چاپ سوم.

[۲]دافعی، حمید(۱۳۸۹)بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی.مجله‌ی رشدآموزش ریاضی، شماره ۱۰۰.صفحات ۷۵-۷۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۳]دکتر مگردیچ تومانیان(۱۳۶۳)، اصول در هندسه ۱، رشد آموزش ریاضی. شماره ۴. صفحات ۳۳-۲۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

[۴]شرف الدین،دکتر احمد، (۱۳۷۷)هندسه دلپذیر، چاپ اول زمستان ۷۷،تهران، انتشارات مدرسه:۲۲۹.

[5] صالحی طالقانی،امیر. امینی، پرویز. (۱۳۷۹). هندسه‌ی کاغذ و تا. رشد آموزش ریاضی. شماره ۶۰-۵۹. صفحات ۸۳-۸۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

[۶]گویا، زهرا و سرشتی، حمیده (۱۳۸۵).آموزش حسابان: مشکلات موجودو نقش تکنولوژی.مجله‌ی رشدآموزش ریاضی، شماره ۸۴.صفحات ۳۰-۳۲. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۷]نورالله نژاد صادقی (۱۳۷۶)مشاهده و تجسم و نقش آن در آموزش و یادگیری ریاضیات، رشد آموزش ریاضی. شماره ۴۹. صفحات ۲۴-۲۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

[۸]عزیزی، منوچهر(بی تا). جشنواره ی هنر ریاضی اریگامی[لوح فشرده]. اصفهان:انتشارات منا.

[۹] گروه آموزشی پژوهشی اندیشه ی خلاق (بی تا). لذت کاردستی۱و۲و۳و۴[لوح فشرده].

[10] Alagic,M.&Palenz,D.(2005). Dynamic Geometry,Art in Mathematics Classroom. Paper Presented to the "Bridges for Teachers,Teachers for Brideges" Conference,Wichita State University.

[11]Bishop,A (1983).Spatial abilities and mathematical Thinking.University of Cambridge,England.

[12]Cabral,B.(2004). The Vanhiele s model and cognitive visualization in Learning Geometry at secondary school.Thesis for the degree of Master of arts in teaching.The University of Texas at Elpaso.

[13] Dreyfus,T.(2002). Computer-rich learning environments and the construction of abstract algebraic concepts. In Borovcnik,M.,& Kautschitsch,H.(Eds)Technology in mathematics Teaching, Proceedings of ICTM T5 in Klogenfurt2001. Schniftenreiche Didactik Der Mathematic Band 25 (pp.17-32).Vienna:öbv&hpt.

[14]Eraso,M (2007).Connecting visual and analytic reasoning to mprove Students spatial visualization abilities: A Constructirist approach. A dissertation submitter in partial fulfillment of requirements for the degree of Doctor of Philosophy in curriculum and instruction. Miami,Florida.

[15]Giaquinto,M.Visual thinking in Mathematics(2005). Oxford.University press.

[16] Greeno,J.G.,&Hall, R.P.(1977).Practicing representation:Learning with and about representational froms.Phi Dalta Kappan,78(5),361-367.

[17]Gutierrez,A.&Jaime,A.Burger,W,F.&Shaughnessy,J,M.(1995).A Camparative Analysis of two ways of assessing the Van Hiele levels of thinking.

[18]Gutierrez, A (1997).Visualization in 3-Dimentional: in search of a frame work.University of Valencia(Spain).

[19]Lawrie,C.&peg,J(1997).some issues in using Mayberry's test to identify VanHiele levels.

[20]Les, Zbigniew, Les,Magd a lena(2008).Shape Understanding system. Springer.

[21]Mancosu, Paolo, Frouin Jorgensen, Klaus.& Pedevsen,Stig (2005) Visualization ,Explantion and Reasoning styles in mathematics. Springer.

[22]Weckbacher,Lisamarie(2007). The role of visualization in Geometric problem solving.A dissertation of the requirements for the Doctor of philosophy in Education.University of California.